第 49 講　期待値

49　次の各問いに答えよ．

［A］　半径 1 の円に内接する正八角形 ABCDEFGH を考える．この 8 個の頂点から同時に 3 点選び三角形をつくるとき，三角形の面積の期待値を求めよ．

［B］　サイコロの n 回振って出た目の和を 2 乗した値を S_n とし，S_n の期待値を E_n とする．

(1)　E_2 を求めよ．

(2)　E_n を求めよ．

＜ Note ＞

第49講　期待値

49　1辺の長さが1の立方体の頂点から相異なる3点を同時に選ぶこととする.

(1)　選んだ3点が正三角形をつくる確率を求めよ.

(2)　選んだ3点が直角二等辺三角形をつくる確率を求めよ.

(3)　選んだ3点がつくる三角形の面積の期待値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(2)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(3)　㋐ $\dfrac{2+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋑ $\dfrac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$

㋒ $\dfrac{3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋓ $\dfrac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

＜ Note ＞

第 49 講　期待値

49　次の各問いに答えよ.

［A］　半径 1 の円に内接する正八角形 ABCDEFGH を考える．この 8 個の頂点から同時に 3 点を選び三角形をつくるとき，三角形の面積の期待値を求めよ.

［B］　サイコロを n 回振って出た目の和を 2 乗した値を S_n とし，S_n の期待値を E_n とする.

(1)　E_2 を求めよ.　　(2)　E_n を求めよ.

【答】　［A］　$\dfrac{2\sqrt{2}+2}{7}$　　［B］　(1)　$\dfrac{329}{6}$　(2)　$\dfrac{49}{4}n^2+\dfrac{35}{12}n$

【解答】

［A］　8 点から 3 点を選ぶ選び方は

$${}_8C_3=56 \text{ 通り}$$

である．また，円の中心を O として，OA に B から下ろした垂線の足を I とするとき $OI=BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であることより $AB=\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ となる.

(A)　三角形が正八角形と 2 辺を共有する場合

頂角の選び方は 8 通りより，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である.

$\triangle$ABH において，$\angle BAH=180^\circ-\angle BEH=180^\circ-\dfrac{1}{2}\times\angle BOH=135^\circ$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AB\times AH\times\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ である.

(B)　三角形が正八角形と 1 辺だけを共有し直角三角形ではない場合

例えば AB だけ共有し直角三角形ではないものは $\triangle$ABD と $\triangle$ABG の 2 通りより，その確率は $\dfrac{2\times 8}{56}=\dfrac{2}{7}$ である.

$\triangle$ABD において，$BD=\sqrt{2}$，$BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times BD\times BI=\dfrac{1}{2}$

(C)　三角形が正八角形と 1 辺だけを共有し直角三角形となる場合

例えば AB だけ共有し直角三角形となるものは $\triangle$ABE と $\triangle$ABF の 2 通りより，その確率は $\dfrac{2\times 8}{56}=\dfrac{2}{7}$ である.

$\triangle$ABE において，$AE=2$，$BI=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AE\times BI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D)　三角形が正八角形と 1 辺も共有せず直角三角形となる場合

例えば $\angle$A が直角の直角三角形となるものは $\triangle$ACG の 1 通りより，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である.

$\triangle$ACG において，$AC=AG=\sqrt{2}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times AC\times AG=1$

(E)　三角形が正八角形と１辺も共有せず直角三角形とならない場合

例えば ∠E が頂角となるものは △EBH の１通りより，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である．

△EBH において，$\mathrm{BH}=\sqrt{2}$，$\mathrm{EI}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，その面積は $\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BH}\times\mathrm{EI}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(A)から(E)より，求める期待値は

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{7}+1\times\frac{1}{7}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{2\sqrt{2}+2}{7}$$

［B］(1)　$E_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left\{\sum_{l=1}^{6}\frac{(k+l)^2}{6^2}\right\}$

$$=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}\left\{\sum_{l=1}^{6}(k^2+2kl+l^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}\left(6k^2+2k\cdot\frac{6\cdot7}{2}+\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left(6\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\cdot2+2\cdot\frac{6\cdot7}{2}\cdot\frac{6\cdot7}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}(7\cdot13\cdot2+3\cdot7^2)$$

$$=\frac{329}{6}$$

(2)　$j=1$，$\cdots$，$n+1$ として，j 回目に出る目を a_j とおくと

$$\frac{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})^2}{6^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{6^{n+1}}\{(a_1+\cdots+a_n)^2+2a_{n+1}(a_1+\cdots+a_n)+{a_{n+1}}^2\}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{6^n}+\frac{2}{6^{n+1}}a_{n+1}(a_1+\cdots+a_n)+\frac{1}{6^{n+1}}{a_{n+1}}^2$$

この両辺の a_j $(j=1,\ \cdots,\ n+1)$ について１から６までの総和をとると

$$E_{n+1}=\frac{1}{6}\cdot E_n\cdot6+\frac{2}{6^{n+1}}\cdot\frac{6\cdot7}{2}\left(\frac{6\cdot7}{2}\cdot6^{n-1}\cdot n\right)+\frac{1}{6^{n+1}}\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\cdot6^n$$

$$=E_n+\frac{49}{2}n+\frac{91}{6}$$

となり，$\dfrac{49}{2}n+\dfrac{91}{6}$ は $\{E_n\}$ の階差数列であるので，

$E_1=\dfrac{91}{6}$ より，$n\geqq2$ のとき

$$E_n=E_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{49}{2}k+\frac{91}{6}\right)$$

$$=\frac{91}{6}+\frac{49}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{91}{6}(n-1)$$

$$=\frac{49}{4}n^2+\frac{35}{12}n\ \text{（これは } n=1 \text{ のときも成り立つ）}$$

第 49 講　期待値

49　1 辺の長さが 1 の立方体の頂点から相異なる 3 点を同時に選ぶこととする.

(1)　選んだ 3 点が正三角形をつくる確率を求めよ.

(2)　選んだ 3 点が直角二等辺三角形をつくる確率を求めよ.

(3)　選んだ 3 点がつくる三角形の面積の期待値を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(2)　㋐ $\dfrac{1}{14}$　㋑ $\dfrac{1}{7}$　㋒ $\dfrac{2}{7}$　㋓ $\dfrac{3}{7}$

(3)　㋐ $\dfrac{2+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋑ $\dfrac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$

㋒ $\dfrac{3+\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{14}$　㋓ $\dfrac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋓　(3) ㋓

【解答】

立方体を ABCD-EFGH とする．8 点から 3 点を選ぶ選び方は

$${}_8C_3=56 \text{ 通り}$$

である.

(1)　正三角形となるのは △ACF，△ACH，△BDE，△BDG，△FHA，△FHC，△EGB，△EGD の 8 通りなので，求める確率は

$$\frac{8}{56}=\boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

(2)　頂点 A が直角の直角二等辺三角形となるのは △ABD，△ABE，△ADE の 3 通りであり，残り 7 頂点に関しても同様なので求める確率は

$$\frac{3\times 8}{56}=\boldsymbol{\frac{3}{7}}$$

(3)　(1)，(2)以外の三角形としては例えば △ADG のような 3 辺の長さが 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の直角三角形となり，その面積は $\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である.

また，(1)の三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，(2)の三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$ なので，求める面積の期待値は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{7}-\frac{3}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}}$$